



TITLE:

# Partについて (関数論と関連する関数解析研究会報告集)

AUTHOR(S):

貴志, 一男

---

CITATION:

貴志, 一男. Partについて (関数論と関連する関数解析研究会報告集). 数理解析研究所講究録 1969, 79: 91-116

ISSUE DATE:

1969-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/108001>

RIGHT:

## Part について

奈良高専 貴志 一男

### §1. 序

二つの事を述べる.  $A$  を compact Hausdorff 空間  $X$  上の function algebra (または uniform algebra),  $M(A)$  を  $A$  の maximal ideal 空間とする.  $M(A)$  の任意の元  $\varphi$  に対して,  $X$  上の確率測度で  $\varphi(f) = \int f dm$  ( $\forall f \in A$ ) なる  $m$  ( $\varphi$  の表現測度という) が一意に決まるとする.  $A$  の  $L^p(m)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) における closure ( $p = \infty$  のときは  $w^*$ -closure) といて, 抽象的 Hardy 空間  $H^p(m)$  を定義したとき, これらの空間と単位円上の古典的 Hardy 空間  $H^p(d\theta)$  との間にはどのような関係があるか, G. Lumer [12] (abstract のみ發表されて "ふつて略証" をつケ), S. Merrill [13, 14] を中心にして考えてみる.

次に,  $B$  を compact Hausdorff 空間  $X$  上の function space としたとき, H. S. Bear [1] は Harnack の不等式を使って, function algebra における Gleason part を拡張した形で,

part を定義し, part metric なる概念を導入したが, これらは更に線形 (位相) 空間の convex 集合に拡張し, 研究される。ここではその一部 [1, 2, 3, 4] を紹介する。

## §2 抽象的 Hardy 空間 $H^p(m)$ と複素平面の単位円上の古典的 Hardy 空間 $H^p(d\theta)$ との関係

1°) G. Lumer [12] を中心にして.

$A$  を compact Hausdorff 空間  $X$  上の function algebra とする。すなわち  $C(X)$  の uniformly closed subalgebra で定数関数を含み,  $X$  の点と分離し且つ sup norm を持つものとする。特に,  $A_R = \{ \operatorname{Re} f : f \in A \}$  は  $C_R(X)$  で dense であるとき,  $A$  は Dirichlet algebra という。また  $\log \|A^{-1}\|$  ( $A^{-1} = \{ f : f \in A \text{ and } 1/f \in A \}$ ) は  $C_R(X)$  で dense であるとき,  $A$  は logmodular algebra という。  $A$  の maximal ideal 空間を  $M(A)$ ,  $A$  の Gelfand 表現を  $\hat{A}$  と書く。  $\varphi \in M(A)$  に対して  $X$  上の確率測度  $m_\varphi$  で  $\varphi(f) = \int f dm_\varphi$  ( $\forall f \in A$ ) なるものが存在するが, この  $m_\varphi$  を  $\varphi$  の表現測度と呼び,  $\varphi$  の表現測度の全体を  $M_\varphi$  と書く。すべての  $\varphi \in M(A)$  に対して  $M_\varphi$  は唯一点からなること,  $A$  は URM (unique representing measure)

という。  $A$  は dirichlet algebra または logmodular algebra のとき  $\forall R M$  である。このとき  $\varphi \in M(A)$  とその表現測度とを同一視する事にする。  $m \in M(A)$  を固定し、  $m$  に関する  $A$  の  $L^p(m)$  closure ( $p=\infty$  のときは  $w^*$ -closure) を  $H^p(m)$  と書いて Hardy 空間という。  $H^\infty(m)$  の Gelfand 表現  $\hat{H}^\infty$  の Šilov boundary は  $M(L^\infty(m)) = \hat{X}$  であり、  $\hat{H}^\infty$  は  $\hat{X}$  上の  $\mathcal{H}$  であり、 logmodular algebra である。 また  $L_R^\infty = \log |(H^\infty)^{-1}|$  または、  $(\hat{X}) = \log |(\hat{H}^\infty)^{-1}|$  である。

定理 2.1  $\varphi \in M(H^\infty)$  とする。

$\varphi \in M(L^\infty) \iff |\varphi(\gamma)|=1$  for every inner function  $\gamma \in H^\infty(m)$ .

( $|\gamma|=1$  (a.e.- $dm$ ) なる  $\gamma \in H^\infty(m)$  を inner function とする。)

証明. ( $\Rightarrow$ )  $\gamma \bar{\gamma} = 1$  かつ  $\varphi(\gamma) \overline{\varphi(\gamma)} = 1$

( $\Leftarrow$ )  $L_R^\infty = \log |(H^\infty)^{-1}|$  を使って、 [10] (pp. 177-180) と

同様に出る。 //

系 2.2  $H^p(m)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) はすべて定数関数のみからなるか、または  $H^\infty(m)$  に属する定数でない inner function が存在する。

証明  $H^p(m) = \{\text{const.}\} \iff H^\infty(m) = \{\text{const.}\}$ .  $H^\infty(m) \neq \{\text{const.}\}$

とする。いま、  $f = u + i v \in H^\infty(m)$  を定数でないとする、  $u$

も  $v$  も定数でない。 ( $\because H^\infty(m) \cap H_R^\infty(m) = \{\text{const.}\}$ ).  $m \in M(H^\infty)$

であるが  $m \notin M(L^\infty)$  (∵  $u \in M(L^\infty)$  ならば  $H^1$ ,  $u = \frac{1}{2}(f + \bar{f}) \in L^\infty$  であるから,  $\int u^2 dm = \int u dm \int u dm = (\int u dm)^2$  になって,  $u$  は定数になる) かつ,  $H(H^\infty) \not\subset M(L^\infty)$ . さて,  $H^\infty(m)$  に属する inner function はすべて定数であるとする, 定理から,  $M(H^\infty) = M(L^\infty)$  となり矛盾する //

$J \in H^\infty(m)$  の定数でない inner function とする.  $\int J dm = \alpha$  とすると,  $|\alpha| < 1$ . (∵  $|\alpha| = 1$  とすると,  $\int |J - \alpha|^2 dm = 0$  より  $J = \alpha$  a.e.-dm 矛盾) そこで  $J' = \frac{\alpha - J}{1 - \bar{\alpha}J}$  とすると,  $|J'| = 1$ ,  $\int J' dm = 0$ . (したがって,  $H^\infty(m)$  に属する inner function  $J$  で定数でない  $\int J dm = 0$  なるものがあると仮定してよい).

$d\theta$  は複素平面上の単位円上の normalized Lebesgue measure,  $H^p(d\theta)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) と Banach 空間 ( $p = \infty$  のとき Banach algebra) と考えられるところの classical Hardy 空間とする.

定理 2.3  $H^\infty(m)$  に属する定数でない inner function  $J$  で,  $\int J dm = 0$  となるものがあると仮定する.  $1 \leq p \leq \infty$  とする.

対応

$$(\#) \quad \sum_{n=-k}^k a_n e^{in\theta} \longrightarrow \sum_{n=-k}^k a_n J^n$$

は,  $L^p(d\theta)$  から  $\text{sp}\{J^n\}$  ( $n$ : 整数) の  $L^p(m)$ -closure  $L^p(m)$  ( $p = \infty$  のときは  $w^*$ -closure) への isometric isomorphism  $T$ .

1: 拡張定理 2.

また,  $\mathcal{A}_p\{J^n\}$  ( $n \geq 0$ ) の  $L^p(m)$ -closure ( $p = \infty$  のときは  $w^*$ -closure) を  $\mathcal{H}^p(m)$  で表わすと,  $T$  は  $H^p(d\theta)$  から  $\mathcal{H}^p(m)$  上への isometric isomorphism である.

$p = \infty$  のときは,  $T$  は algebra isomorphism である.

証明.  $f \in L^p(d\theta)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) とする.  $f$  の  $T$ - $n$  級数の Cesaro means は  $f$  に  $L^p(d\theta)$ -norm ( $p = \infty$  のときは  $w^*$ -topology) で収束する.

さて,  $p(\lambda) = \sum_{n=-k}^k a_n \lambda^n$  とする.

$$\int P^n(e^{i\theta}) \overline{P^n(e^{i\theta})} d\theta = \int P^n(J) \overline{P^n(J)} dm$$

よって,  $p = 2n$  (偶数) のとき, (†) は求める isometric isomorphism  $T$  に拡張される.

$f \in L^\infty(d\theta)$  とする.  $Tf$  は  $p = 2n$  の  $n$  に無条件収束に決まる.

$$\therefore \|Tf\|_\infty = \lim \|Tf\|_{2n} = \lim \|f\|_{2n} = \|f\|_\infty.$$

よって,  $T$  は  $L^\infty(d\theta)$  上でも isometry である.

Riesz convexity theorem によって,  $\|T\|_p \leq 1$  ( $2 \leq p \leq \infty$ ).

同様にして,  $\|T^{-1}\|_p \leq 1$ .  $\therefore \|Tf\|_p = \|f\|_p$ ,  $\forall f \in L^p(d\theta)$ ,  $2 \leq p \leq \infty$ .

次に,  $1 \leq p < 2$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  とする. 任意の多項式

$$p(e^{i\theta}) \mapsto T p(e^{i\theta}), \quad \|p(e^{i\theta})\|_p = \sup \left| \int p(e^{i\theta}) \overline{q(e^{i\theta})} d\theta \right|$$

ただし  $\sup$  は (1) ...  $\int |q(e^{i\theta})|^q d\theta \leq 1$  なるすべての

多項式. また,  $\|P(J)\|_p = \sup \left| \int P(J) \bar{Q}(J) dm \right|$ , したがって

$$\sup_p \text{ は } (2) \dots \int |Q(J)|^2 dm \leq 1 \text{ なる } Q(J) \text{ の多項式.}$$

(注意.  $Q(J)$  は  $L^2(m)$  の一般には  $\text{dense}$  ではないが,  $L^2(m)$  の単位球の  $\overline{\text{closure}}$  の  $Q$  としても  $\sup$  に影響ない).

$p > 2$  であるから, (1) と (2) とは同値である. よって,

(H) は  $1 \leq p \leq \infty$  なるすべての  $p$  について, isometric isomorphism

$T$  に拡張出来る. その他の部分については, 容易に証明出来る. //

2°) S. Merrill [13, 14] が中心に 1 である.

function algebra  $A$  の maximal ideal 空間  $M(A)$  の二元  $\varphi_1, \varphi_2$  に対して

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\| = \sup \{ |\varphi_1(f) - \varphi_2(f)| : f \in A, \|f\| \leq 1 \}$$

とおき,

$$\varphi_1 \sim \varphi_2 \iff \|\varphi_1 - \varphi_2\| < 2$$

によつて,  $\sim$  を定義すると,  $\sim$  は同値関係と満足する[8].

$$\Sigma(\varphi) = \{ \varphi' \in M(A) : \varphi \sim \varphi' \}$$

を  $\varphi$  を通る (Gleason) part と"う.  $\Sigma(\varphi) \neq \{\varphi\}$  のとき,

$\Sigma(\varphi)$  を nontrivial part と"う.

定理 2.4 次の3つの条件は同等である. [7]

$$(1) \quad \varphi_1 \sim \varphi_2$$

$$(2) \quad \sup \{ |\varphi_1(f)| : f \in A, \|f\| \leq 1, \varphi_2(f) = 0 \} < 1$$

$$(3) \quad M_{\varphi_1} \rightarrow \exists \mu, \quad M_{\varphi_2} \rightarrow \exists \nu, \quad d\mu \leq c d\nu, \quad d\nu \leq c d\mu \quad \text{とある定数 } c \text{ が存在する.}$$

$A \in \text{URM}$ ,  $P \in M(A)$  の nontrivial part とする.

$m, \nu \in P$  とすると,  $dm \leq c d\nu$ ,  $d\nu \leq c dm$  となる  $c (\geq 1)$  が存在する. よって,  $H^p(m)$  と  $H^p(\nu)$  とは測度, 集合としては同じで, (ゆえに, 単に  $H^p$  と書くことがある) Banach 空間としては異なるが同値な norm をもつ.

$m \in P$  を固定する. 不等式 ( $\varphi \in A$ )

$$|\int \varphi dm| = |\int \varphi d\nu| = |\int \varphi d\nu| \leq (\int |\varphi|^p d\nu)^{1/p} \leq K (\int |\varphi|^p dm)^{1/p}$$

( $K$  は定数) を使って,  $\int$  は  $H^p(m)$  の有界な linear functional に一意的に拡張される.  $\int$  は algebra  $H^\infty(m)$  に制限した全体では,  $M(H^\infty)$  において nontrivial な part となる.

Wermer の定理 [18, I, 11].

ある inner function  $Z \in H^\infty(m)$  が存在して,

$$ZH^2 = H_m^2, \quad H_m^2 = \{f \in H^2, \int f dm = 0\}$$

となり,  $D$  を複素平面内の開単位円板とすると,

$\hat{Z} : P \rightarrow D$  は one-to-one, onto である. また

その逆  $\tau = \hat{Z}^{-1} : D \rightarrow P$  は one-to-one, onto の連続で



ある.  $\forall f \in H^2(m)$  は  $(\hat{f} \cdot \tau)(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$ ,  $a_n = \int \bar{z}^n f dm$   
と展開できて,  $D$  で正則な関数  $\hat{f} \cdot \tau$  を得る.

さて, Lumer の定理 2.3 を  $J = Z$  として応用する.

$1 \leq p \leq \infty$  のとき, 対応  $T$  は  $H^p(d\theta)$  を  $\mathcal{A}_p\{Z^n\}_{n \geq 0}$  の  $L^p(m)$  closure  $\mathcal{H}^p(m)$  ( $p = \infty$  のときは  $w^*$ -closure) に isometric isomorphic に移す. さて, これから

$$\underline{H^p(m) = \mathcal{H}^p(m) \text{ となる条件}}$$

を求めていく.  $H^2(m) = \mathcal{H}^2(m) \oplus (\mathcal{H}^2(m))^{\perp}$  (直交分解) とする.

補題 2.5 次の3つの条件は同等である.

- (1)  $f \in (\mathcal{H}^2(m))^{\perp}$
- (2)  $a_n = \int \bar{z}^n f dm = 0 \quad (\forall n \geq 0)$
- (3)  $\hat{f}(\rho) = 0, \quad \forall \rho \in P$

証明 (1)  $\Leftrightarrow$  (2) は明らか. (2)  $\Rightarrow$  (3):  $\hat{f}(\rho) = \sum a_n \lambda^n$ ,  
 $a_n = \int \bar{z}^n f dm$ ,  $\lambda = \hat{z}(\rho)$  より明らか. (3)  $\Rightarrow$  (2):  
 $\hat{f}(\rho) = \sum a_n \lambda^n = 0, \quad \forall \lambda \in \{|\lambda| < 1\} \quad \therefore a_n = 0 \quad //$

特に,

$$f \in H^{\infty}(m), \quad \hat{f}(\rho) = 0, \quad \forall \rho \in P \Rightarrow f \equiv 0 (dm) \quad \text{と}$$

$$f \in H^{\infty}(m), \quad \int \bar{z}^n f dm = 0 \quad (\forall n \geq 0) \Rightarrow f \equiv 0 (dm)$$

とは同等である. ここに関連して, 次の事が成り立つ.

補題 2.6 次の (1), (2) は同等である

$$(1) \quad f \in H^\infty(m), \quad a_n = \int \bar{z}^n f dm = 0 \Rightarrow f \equiv 0 \quad (dm)$$

$$(2) \quad f \in H^1(m), \quad a_n = \int \bar{z}^n f dm = 0 \Rightarrow f \equiv 0 \quad (dm)$$

これから,  $\{z^n\}_{n \geq 0}$  は  $H^p(dm)$  で  $L^p(m)$  dense ( $p = \infty$  のときは  $w^*$ -dense) である事は  $p$  に依存しない。よって,

$$\left[ f \in H^\infty(m), \hat{f}_p = 0 \quad (\forall p \in P) \Rightarrow f \equiv 0 \quad (dm) \right] \Leftrightarrow H_f^p(m) = H^p(m), \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

定理 2.7 次の (1), (2) は同等である。

$$(1) \quad f \in H^\infty(m), \quad \hat{f}_p = 0, \quad \forall p \in P \Rightarrow f \equiv 0 \quad (dm)$$

$$(2) \quad H^\infty(m) \text{ は } L^\infty \text{ の } w^* \text{-closed subalgebra として maximal}$$

証明 (1)  $\Rightarrow$  (2);  $T(H^\infty(dm)) = (\text{sp. } \{z^n\}_{n \geq 0} \text{ の } w^* \text{ closure}) = H^\infty(m)$ ,  $L^\infty(m) \supset T(L^\infty(dm)) = (\text{sp. } \{z^n\}_{n \geq 0} \text{ (n: 整数) の } w^* \text{ closure}) \supset H^\infty(m) + \overline{H^\infty(m)}$  であり,  $H^\infty(m) + \overline{H^\infty(m)}$  は  $L^\infty(m)$  の  $w^*$ -dense であるから,  $T(L^\infty(dm)) = L^\infty(m)$ . 一方,  $H^\infty(dm)$  は  $L^\infty(dm)$  の  $w^*$ -closed subalgebra として maximal である ([10], p. 174).

(2)  $\Rightarrow$  (1);  $K \subset H^\infty(m)$  と  $\bar{z}$  とによって生成される algebra の  $w^*$ -closure とすると,  $K = L^\infty(m)$ .  $f \in H^\infty(m)$ ,  $\hat{f}_p = 0$  ( $\forall p \in P$ ) とする. 補題 2.5 より  $a_n = \int \bar{z}^n f dm = 0$  ( $\forall n \geq 0$ ).  $g \in H^\infty(m)$ ,  $b_n = \int \bar{z}^n g dm$  とすると

$$\int \bar{z}^n g f dm = b_0 a_n + b_1 a_{n-1} + \dots + b_n a_0 = 0$$

$$\therefore \int k f dm = 0, \quad \forall k \in L^\infty(m). \quad \therefore f \equiv 0 (dm) //$$

Example (定理 2.7 の条件を満足しない例)

$T^2$  は torus (=  $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$  の cartesian product),  
 $dm = dx dy$  は  $T^2$  上の normalized Haar measure,  
 $S = \{(m, n) : n > 0\} \cup \{(m, 0) : m \geq 0\}$  ( $m, n$  整数とて),  
 $A = A(T^2) = \{f \in C(T^2) : a_{mn} = \iint f(x, y) e^{-imx} e^{-iny} dx dy = 0$   
for  $\forall (m, n) \notin S\}$

とすると,  $A$  は dirichlet algebra ([19] - p.69) である.

$$M(A) = \{(x, y) : |x|=1, |y| \leq 1\} \cup \{(x, 0) : |x| < 1\}$$

を, 表現測度と書く.

$$M(A) = \{\delta_x \times \delta_y : x \in X, y \in Y\} \cup \{\delta_x \times P_r(\theta - y) dy : x \in X, re^{i\theta} \in D\}$$

$$\cup \{P_r(\theta - x) dx dy : re^{i\theta} \in D\}$$

ここで,  $\delta_x$  は Dirac measure,  $P_r(\theta - x)$  は Poisson kernel,

$D$  は複素平面上の open unit disk と表わす.

$dm = dx dy$  と置くと Gleason part は  $P(m) = \{(x, 0) : |x| < 1\}$   
である. さて,  $f = e^{iy} \in H^\infty(m)$ ,  $\hat{f}(p) = \iint e^{iy} P_r(\theta - x) dx dy$   
 $= 0$  ( $\forall p \in P$ ) であるから,  $f \neq 0$ . ところで, 定理の条  
件を満足しない. さらに,  $\bar{P}(m) = \{(x, 0) : |x| \leq 1\}$  であ  
るから,  $\bar{P}(m) \cap T^2 = \emptyset$ . これは (Gleason part's closure)  
 $\cap$  Silov boundary  $= \emptyset$  であることと矛盾する.

補題 2.8  $\mathcal{F} \cap H(\mathbb{D}) \neq \emptyset$  とする. ( $\mathcal{F}$  については p.6 参照)  $H^1(\mathbb{D}) \ni f, \quad \mathcal{F}(f) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{F} \Rightarrow \int \log |f| dm = -\infty$

証明  $\int \log |f| dm > -\infty$  とすると,  $f = gh$  ( $g$  は outer function,  $h$  は inner function).  $Ag$  は  $H^1(\mathbb{D})$  に dense であるから,  $dn_g \rightarrow 1$  ( $L^1(\mathbb{D})$ ) となる列  $\{x_n\} \subset A$  が存在する. よって,  $dn_g h \rightarrow h$  ( $L^1(\mathbb{D})$ ).  $\therefore \mathcal{F}(dn_g h) \rightarrow \mathcal{F}(h)$ ,  $\forall f \in \mathcal{F}$ .  $\therefore \int (dn_g h) = \mathcal{F}(x_n f) = \mathcal{F}(x_n) \mathcal{F}(f) = 0 \quad \therefore \mathcal{F}(h) = 0$ .  $h \in H^\infty(\mathbb{D})$  であるから,  $\mathcal{F}(h) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{F}$ . よって, 定理 2.1 から,  $\mathcal{F} \cap H(\mathbb{D}) = \emptyset$ . 仮定に反する. //

上の例に帰すると,  $f = e^{i\theta} \in H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^1(\mathbb{D})$ ,  $\mathcal{F}(e^{i\theta}) = 0$ ,  $\forall f \in P(\mathbb{D})$ .  $\therefore \int \log |e^{i\theta}| dm = 0 > -\infty$ . したがって,  $\mathcal{F} \cap H(\mathbb{D}) = \emptyset$  であることとを示す.

問題  $H(\mathbb{D}) \not\subseteq \mathcal{F} \cap H(\mathbb{D}) \neq \emptyset$  とする例があるだろうか.

§3 Part の拡張 — 特に part metric について —

$B$  を compact Hausdorff 空間  $X$  上の function space, すなわち  $C_{\mathbb{R}}(X)$  の subspace で, 定数関数を含む  $X$  の点と分

例 1,  $b \rightarrow B \ni u$  に norm  $\|u\| = \sup |u(x)|$  が与えられているとする.

1°)  $X$  上の part に  $\sim$  として

$x, y \in X$  とする.

$$x \sim y (a) \text{ (ある } a \text{ は } x \sim y) \Leftrightarrow \exists a > 0 \text{ such that } \frac{1}{a} < \frac{u(x)}{u(y)} < a \\ \text{for } \forall u \in B, u > 0.$$

により,  $\sim$  を定義すると,  $\sim$  は同値関係に満足する.

$\Pi_{X(x)} = \{y \in X : x \sim y\}$  を  $x$  を通る part と言う. 特に,  $A$  は  $X$  上の function algebra,  $B = \text{Re } A$  とすると,

$$\|x - y\| = \sup \{ |f(x) - f(y)| : f \in A, \|f\| \leq 1 \} < 2 \Leftrightarrow x \sim y (a)$$

となり,  $A$ -parts と  $B$ -parts とは一致する.

$x \sim y$  のとき,

$$d(x, y) = \inf \log \{a : x \sim y (a)\} = \sup_{u > 0} |\log u(x) - \log u(y)|$$

とすると,  $d(x, y)$  は  $X$  の各 part 上の metric である.

この metric は part metric である.

2°) state space  $T_B$  上の part に  $\sim$  として.

$B^*$  は  $B$  の dual space として,  $B^*$  に topology  $\sigma(B^*, B)$

を入れたと,  $B = (B^*)^*$  と考へる事が出来る. また  $X$  は  $B^*$  の中に homeomorphic に埋め込む事が出来る.  $B^*$  における  $X$  の閉包を  $T_B$  とすると,

$$T_B = \{F \in B^* : \|F\| = F(1) = 1\}$$

となる.  $T_B$  は  $B^*$  の compact 集合である. この  $T_B$  を  $B$  の state space (または carrier space) という.

$x, y \in T_B$  のとき,

$$(1) \quad x \sim y \iff \begin{cases} x=y \text{ または } x, y \text{ は } T_B \text{ のある開線分} \\ \text{に含まれる.} \end{cases}$$

により  $\sim$  を定義すると,  $\sim$  は同値関係と満足する.

$$\Pi_{T_B}(x) = \{y : x \sim y, y \in T_B\}$$

と,  $x$  を通る part という. この時,  $x \in X$  ならば

$$X \cap \Pi_{T_B}(x) = \Pi_X(x)$$

となり, (1) を,  $X$  に定義した part の  $T_B$  への拡張と考へる事が出来る.

Example.  $X$  は複素平面上の閉単位円板  $\{ |z| \leq 1 \}$ ,  $B$  は  $X$  上の連続で, 内部  $X^\circ = \{ |z| < 1 \}$  で調和な関数全体とする.  $\Gamma = \{ |z| = 1 \}$  とする.  $X^\circ$  は一つの part であり, また  $\Gamma$  上の各点は一つの part である.  $T_B \supsetneq X$  であり,  $\{ |z| < 1 \}$  と  $T_B$  との関係については, [2] を参照のこと.

注意.  $B$  を  $X$  を含む compact 集合  $K$  上の function space に isometric isomorphic に拡張出来るような  $K$  のうちで最大なのは,  $T_B$  である. この意味は,  $T_B$  は function algebra の maximal ideal 空間と類似した性質をもつ.

30) 実線形空間の convex 集合での part について.

$L$  を実線形空間,  $C$  を  $L$  の直線を含む convex 集合とする.  $[x, y] = \{\lambda x + (1-\lambda)y ; 0 \leq \lambda \leq 1\}$ ,  $[x, y]$  extends (in  $C$ ) by  $r(>0)$  とは  $x+r(x-y) \in C$  かつ  $y+r(y-x) \in C$  の事と言う.

$$x \sim y \Leftrightarrow [x, y] \text{ extends by some } r(>0).$$

ここで  $\sim$  を定義すると,  $\sim$  は同値関係と満足する [3].

$\Pi(x) = \{y \in C ; x \sim y\}$  は  $x$  を通る part という.

i)  $x \sim y$  のとき:

$$d(x, x) = 0, \quad x \neq y \text{ ならば } d(x, y) = \inf \left\{ \log \left( 1 + \frac{1}{r} \right) : \right.$$

$$[x, y] \text{ extends by } r \}$$

ii)  $x \not\sim y$  のとき:

$$d(x, y) = \infty$$

と  $d(x, y)$  を定義したとき,  $d$  は  $C$  上で ( $\infty$  の値もとり得る) metric である. これを part metric という.

次に  $\Pi(x)$ ,  $d(x, y)$  の性質を列記する.

a)  $\Pi(x)$  は convex である.

b)  $\Pi(x) = \{y \in C : d(x, y) < \infty\}$ , よって  $\Pi(x)$  は open かつ closed である.

c)  $x, y \in C$ ,  $\phi(\lambda) = \lambda x + (1-\lambda)y$  ( $\lambda$ : 実数) とすると,  
 $\lambda_0 \in (0, 1)$ ,  $\lambda \rightarrow \lambda_0$  ならば  $d(\phi(\lambda), \phi(\lambda_0)) \rightarrow 0$ , 更に,  
 $x \sim y$  のとき,  $\lambda_0 \in [0, 1]$ ,  $\lambda \rightarrow \lambda_0$  ならば  $d(\phi(\lambda), \phi(\lambda_0)) \rightarrow 0$

d)  $C$  の part は  $C$  の component である.

e)  $\psi(\lambda, x, y) = \lambda x + (1-\lambda)y$  に対し,  $x, y \in C$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

$\Pi$  は  $C$  の任意の part と一致し, 写像

$$\psi: [0, 1] \times \Pi \times \Pi \rightarrow \Pi$$

は連続である. 更に,  $\psi: (0, 1) \times C \times C \rightarrow C$  は連続である.

f) ノルム空間  $E$  における有界な開凸集合  $C$  は一つの part であり,  $C$  上には part metric による topology は norm topology と同等である.

補題 3.1  $u$  は  $C$  上では concave 関数 (特に affine 関数) で,  $\Pi$  は  $C$  の一つの part とする.

$$u(x) > 0, \forall x \in \Pi \quad \text{or} \quad u \equiv 0 \text{ on } \Pi.$$



証明  $x, y \in \Pi$  とする,  $[x, y]$  extends by  $r (> 0)$ .

$$\therefore x_0 = x + r(x-y) \in C \quad \therefore x = \frac{1}{1+r} x_0 + \frac{r}{1+r} y. \quad \text{よって,}$$

$$u(x) \geq \frac{1}{1+r} u(x_0) + \frac{r}{1+r} u(y) \geq \frac{r}{1+r} u(y). \quad u(x) = 0 \text{ とする}$$

$$\text{と, } u(y) \geq 0 \quad \text{より } u(y) = 0. \quad //$$

4°) convex cone における part について

Example.  $B$  は compact Hausdorff 空間上の function space.

$P = \{f \in B^*: f \geq 0\}$  とすると,  $P$  は 原点  $0 \in P$  とする

convex cone になる. この例を  $\S 2$  の principal example として  
証明を述べる.

$P$  は 実線形空間  $E$  における 直線を含む  $\neq \emptyset$  convex cone,  
原点  $0 \in P$  とする. 従って  $P \cap (-P) = \{0\}$  であり,  $0 \neq$   
直線を含む  $\neq \emptyset$ .  $x, y \in L$  のとき

$$x \leq y \iff y - x \in P$$

により  $L$  上は partial order  $\leq$  が成り立つ.

$x, y \in P$  とし  $x \leq y$  のとき  $y - x \in P$  が成り立つ.

$$a) [x, y] \text{ extends by } r \iff (1 + \frac{1}{r})x \geq y, (1 + \frac{1}{r})y \geq x$$

$$b) [x, y] \text{ extends by } r, z \in P \implies [x+z, y+z] \text{ extends by } r.$$

$$c) [x, y] \text{ extends by } r \iff [px, py] \text{ extends by } r$$

( $p$  は任意の正数)

$$d) \quad x \sim px \quad \forall p, p \text{ 正数}$$

$$e) \quad x \sim y \Rightarrow x \sim x+y$$

d), e) から

$P$  の  $\delta$  の part は  $P$  の convex subcone である。

$P$  の part metric による "  $\tau$  は,

$$a) \quad x \sim y, \quad x \neq 0 \Rightarrow d(x, y) = \inf \{ \log a : ax \geq y \text{ and } ay \geq x \}$$

$$b) \quad d(px, py) = d(x, y), \quad \forall p > 0, \quad \forall x, y \in P.$$

$$c) \quad d(x+z, y+z) \leq d(x, y), \quad \forall x, y, z \in P.$$

$$d) \quad d(rx, sx) = |\log r - \log s| \quad x \in P, \quad x \neq 0, \quad r > 0, \quad s > 0.$$

$$e) \quad d(\lambda x, \lambda_0 x_0) \leq d(x, x_0) + |\log \lambda - \log \lambda_0|$$

$$(x, x_0 \in P, \quad x_0 \neq 0, \quad \lambda > 0, \quad \lambda_0 > 0)$$

即ち,  $(0, +\infty) \times P \xrightarrow{\text{into}} P$  の写像  $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$  は

$P$  上の part metric に関して連続

$$f) \quad d(x+y, x_0+y_0) = \max [d(x_0, x), d(y_0, y)] \quad (x, y, x_0, y_0 \in P)$$

即ち,  $P \times P \xrightarrow{\text{into}} P$  の写像  $(x, y) \rightarrow x+y$  は  $P$  上の

part metric に関して連続である。

5°) part metric の completeness による "  $\tau$ 。

線形空間  $L$  は weak space とする。即ちある線形空間  $M$  があ

さて

i)  $L \times M$  上の bilinear form  $(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$  が定義されていゝ。

ii)  $\forall y \in M$  の linear functional  $x \rightarrow \langle x, y \rangle, x \in L$  と連続にする  $\phi$  weak topology の  $(L, M)$  標準化されていゝ。したがって,  $\phi$  の  $(L, M)$  は  $L$  上の locally convex topology である。更に  $\phi$  は  $L$  上の weak topology を生ずる。

iii)  $\langle x, y \rangle \geq 0, \forall y \in M \Rightarrow x = 0$  と仮定する。よって,  $L$  は Hausdorff 空間である。

$C$  は  $L$  上の closed convex subset とする,  $C^+$  は  $C$  上の 0 でない  $L$  上の連続な affine 関数の全体とする。

$$x \in C \iff F(x) \geq 0, \forall F \in C^+.$$

定理 3.2  $C$  は weak Hausdorff 空間  $L$  の直線集合  $C^+$  による closed convex 集合とする,  $\forall x, y \in C$  のとき

$$d(x, y) = \sup \{ |\log F(x) - \log F(y)| : F \in C^+, F(y) > 0 \}$$

証明. i)  $x \sim y$  とする, 補題 3.1 より  $F(y) > 0 \iff F(x) > 0, \forall x \in \Pi(y)$ .

$$x + r(x - y) = (1+r)x - ry \in C \iff (1+\frac{1}{n})F(x) \geq F(y), \forall F \in C^+$$

$$y + r(y - x) = (1+r)y - rx \in C \iff (1+\frac{1}{n})F(y) \geq F(x), \forall F \in C^+$$

よって,

$$[x, y] \text{ extends by } n \iff (1+\frac{1}{n})^{-1} \leq F(x)/F(y) \leq 1+\frac{1}{n}$$

$$\therefore |\log F(x) - \log F(y)| \leq \log \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right)$$

$$\therefore d(x, y) = \inf \log \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right) = \sup |\log F(x) - \log F(y)|.$$

ii)  $x \neq y$  とする.  $y + \epsilon(y-x) \notin C$  ( $\forall \epsilon > 0$ ).  $\epsilon > 0$  を固定すると, ある  $F \in C^+$  が存在して,  $F(y + \epsilon(y-x)) < 0$ .  $\therefore$  したがって  $\frac{1+\epsilon}{\epsilon} F(y) < F(x)$ .  $F(y) > 0$  のときは  $|\log F(x) - \log F(y)| = \log F(x) - \log F(y) > \log \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right)$ .  $\epsilon \rightarrow 0$  のときは  $\log \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right) \rightarrow \infty$ .  $F(y) = 0$  のときは  $F \in F + \alpha$  ( $\alpha > 0$ , 十分小) であるから.

系 3.3  $C$  は weak Hausdorff 空間  $L$  の直線を含む凸集合である.  $x_0 \in C$  の  $\alpha$ -neighborhood の基本系は,

$$\{x \in C : |F(x) - F(x_0)| < \epsilon, \text{ all } F \in C^+, F(x_0) = 1\}$$

$$= \{x \in C : |F(x) - F(x_0)| < \epsilon, \text{ all } F \in C^+, 0 < F(x_0) \leq 1\} \quad (\forall \epsilon > 0)$$

による.  $\therefore$  したがって,  $\alpha$ -topology は  $\forall x_0 \in C$  に対して,  $\{F \in C^+ : F(x_0) = 1\}$  は同程度連続である. weakest topology である.

Choquet の定理  $C$  が weak Hausdorff 空間  $L$  の直線を含む凸集合ならば,  $L$  上のすべての連続な affine 関数は  $C^+$  の  $\infty$  の関数の差である. [20].

この定理から次のことが従う.

定理 3.4  $C$  は weak Hausdorff 空間  $L$  の直線を含み、complete convex 集合とする。この時

- i) part metric による topology は  $C$  の topology より強い。
- ii)  $C$  は  $d$ -complete である。したがって、左 part も  $d$ -complete である。

次に、convex 集合  $C$  は convex cone  $P$  (ただし頂点  $0 \in P$ ) であり特別の場合を考へる事にする。このとき、定理 3.2 は次のようになる。

定理 3.5  $L$  は weak Hausdorff 空間、 $P$  は直線を含み、 $L$  の closed convex cone の頂点  $0 \in P$  とする。また、 $P^+ \in P$  上に真に与えられ、 $L$  上の連続な linear functional の全体とする。  $\forall x, y \in P$  に対して、

$$d(x, y) = \sup \{ |\log f(x) - \log f(y)| : f \in P^+, f(x) > 0, f(y) > 0 \}$$

注意。  $x \sim y$  のとき、  $f(x) > 0$  (または  $f(y) > 0$ ) と  $f > 0$  on  $\Pi = \Pi(x)$  とは同値である。(補題 3.1) かつ、

$$\{ x \in \Pi : |f(x) - f(y)| < \varepsilon, f \in P^+, 0 < f(x) \leq 1 \} \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

は  $\Pi$  における  $x_0$  の  $d$ -neighborhood の基の逆像系である。(系 3.3)

closed convex cone が直線を含むかどうかについては、次の判定法がある。

補題 3.6  $P$  は weak Hausdorff 空間の closed convex cone  
 であるとき、原点  $0 \in P$  である。

$P$  は直線を含む  $\Leftrightarrow P \cap (-P) = \{0\}$ .

$P$  を原点  $0 \in P$  である convex cone とする。  $K$  を  $P$  の convex  
 な部分集合で、各 ray  $\{rx : r > 0\}$ ,  $x \in P$ ,  $x \neq 0$  は  $K$  とはた  
 一点のみで交わる時、  $K$  を  $P$  の section という。従って、  
 $P = \{rx : x \in K, r > 0\}$

定理 3.7  $P$  は weak Hausdorff 空間の convex cone である。  
 $P \cap (-P) = \{0\}$  とする。もし  $P$  は compact な section  $K$   
 を含むならば、  $P$  は  $d$ -complete である。

section  $K$  を含む、直線を含む convex cone  $P$  について  
 2 体、  $K$  の parts は  $P$  の parts と  $K$  との交わりである。こ  
 れは次のことから従う。

定理 3.8  $x, y \in K$  とする。

$[x, y]$  extends by  $r$  in  $K \Leftrightarrow [x, y]$  extends by  $r$  in  $P$

## 6. Examples

1)  $B$  is compact Hausdorff space  $X$  の function space  $C(X)$ ,  
 $B$  の dual space is  $B^* = L$  である.  $L$  に topology  $\sigma(L, B)$  を  
 入れた  $B = (B^*)^* = L^*$  である.

$P = \{F \in B^*: F \geq 0\}$  は convex cone である, 原点  $0 \in P$   
 かつ  $P \cap (-P) = \{0\}$  である.  $K = \{F \in P: F(1) = 1\}$  は  $P$  の  
 section であり, weak topology  $\sigma(L, L^+)$  により compact である.  
 したがって, 定理 3.7 により  $P, K$  は part metric  $d$  に関して  
 complete である.

次に,  $B = C_R(X)$  による場合を考える.

2) compact Hausdorff space  $X$  上の real Radon measures 全体の  
 なる空間  $\mathcal{M}(X) = \mathcal{M}$  である.

$B = C_R(X)$  であるとき,  $B^* = \mathcal{M}$ . また  $P = \mathcal{M}_+ = \{\mu \in \mathcal{M}: \mu \geq 0\}$   
 であり,  $K = \{\mu \in P: \mu(X) = 1\}$ . 次に  $\mathcal{M}_+$  上の part と part metric  
 を説明する. 4) により,  $\mathcal{M}_+ \ni \mu, \nu$  であるとき

$$(i) \dots \mu \sim \nu \iff \exists \alpha > 0, \alpha\mu \geq \nu, \quad \alpha\nu \geq \mu$$

$$(\text{ただし, } \mu \neq 0 \text{ かつ } \nu \neq 0 \text{ かつ } \alpha \geq 1)$$

( $P$  により,  $\lambda$  による order  $\mu \geq \nu$  は,  $f$  について  $f$  measurable  
 集合  $E$  に対して  $\mu(E) \geq \nu(E)$  を意味する.) 特に,  
 zero measure はそれ自身一つの part である. (ii) により

$$\mu \sim \nu \Leftrightarrow \mu \ll \nu, \nu \ll \mu, \text{ so } 0 < L \leq \frac{d\mu}{d\nu}, \frac{d\nu}{d\mu} \leq M < \infty$$

for some constants  $K, M$  as above.

今  $M_+ \ni \mu$  是 一 个 固定数 2.

$$P(\mu) = \{g \in L^\infty(\mu) : g \text{ positive, bounded away from zero}\}$$

是 子 集,  $\mu \in \mathcal{M}_+$  的 part  $\Pi(\mu)$  是

$$\Pi(\mu) = \{g\mu : g \in P(\mu)\}$$

是 子 集. 对应

$$P(\mu) \ni g \longrightarrow g\mu \in \Pi(\mu)$$

是,  $P(\mu)$  与  $\Pi(\mu)$  上 的 one-one 对应 是 的.  $g$  与

$g\mu$  是 同 一 物 的 子 集, 是,  $L^\infty(\mu)$  metric 与  $\Pi(\mu)$  是 同 一 物 的 子 集. 是 的 时, 这 个 子 集 是 的.

定理 3.9  $\mu \in \mathcal{M}_+(X)$  是 子 集.  $\mathcal{M}_+(X)$  的 子 part 是 的 子 part metric  $d$  是  $P_\mu$  的 对应 子 集 上 的  $L^\infty(\mu)$ -metric 是 同 一 物 的 子 集 是 的. 是 的,  $g_0, g_1, g_2, \dots \in P_\mu$  的 子 集 是 的, 是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - g_0\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(g_n\mu, g_0\mu) = 0$$

文 献

- [1] H.S. Bear: A geometric characterization of Gleason parts. Proc. Amer. Math. Soc., 16 (1965), 407-412.



- [2] ——— : Continuous subparts for functions spaces.  
Function algebra (Proc. International symposium) (1965),  
292 — 299.
- [3] H. S. Bear and M. L. Weiss : An intrinsic metric  
for parts. Proc. Amer. Math. Soc., 18 (1967), 812 — 817.
- [4] H. Bauer and H. S. Bear : the part metric in convex  
sets. Pacif. J. Math., 30 (1969), 15 — 33.
- [5] H. S. Bear and B. Walsh ; Integral kernel for  
one-part function spaces, Pacif. J. Math., vol. 23  
(1967), 209 — 215.
- [6] E. Bishop ; Representing measures for points in a  
uniform algebra, Bull. Amer. Math. Soc., 70 (1964), 121 — 122.
- [7] A. Browder : Introduction to function algebras.  
Benjamin, New York, (1969).
- [8] A. M. Gleason : Function algebras, Seminars on  
Analytic Functions II, Princeton, 1957
- [9] K. Hoffman : Analytic functions and logmodular  
Banach algebras. Acta Math. 108 (1962).
- [10] ——— Banach spaces of Analytic functions.  
Prentice Hall, 1962.

- [11] G. Lumer: Analytic functions and Dirichlet problem,  
Bull. Amer. Math. Soc., 70 (1964)
- [12] ——— :  $H^\infty$  and the imbedding of the classical  
 $H^p$  spaces in arbitrary ones. Function algebra  
(Proc. International symposium) (1965), 285—286.
- [13] S. Merrill:  $H^p$  spaces derived from function algebras,  
Dissertation, Yale Univ., (1966).
- [14] ——— : Maximality of certain Algebras  $H^\infty(m)$ .  
Math. Zeitschr. 106 (1968), 261—266.
- [15] N. Mochizuki: Function algebras & Gleason parts.  
第五回, Functional analysis symposium, (1967)  
東北大理.
- [16] ——— : Gleason parts & characterization.  
第一回, Function algebras 共同研究会 (1967)  
京都大数理解析研究所.
- [17] 和田 淳蔵: Abstract harmonic function & integral  
representation : 第二回, Function algebras 共同研究会  
(1968), 京都大数理解析研究所.
- [18] J. Wermer: Dirichlet algebras. Duke Math. J.  
27 (1960), 273—282.

- [19] ——— : Banach algebras and analytic functions.  
Advances in Math. I (1961), 51 — 102.
- [20] G. Choquet : Ensembles et cônes convexes faiblement  
complets , C. R. Académie Science 254 (1962),  
1908 — 1910 ; 2123 — 2125.